Zovšeobecnenie problému vrcholového pokrytia grafu

Analýza a návrh riešenia

Dávid Szabari

2Im, 2017 - 2018

Ciele práce:

- Analyzovať vybrané zovšeobecnenia Problému vrcholového pokrytia a ich aplikácie pre komunikáciu v sieťach.
- Pokúsiť sa získať nové výsledky a navrhnúť algoritmy na riešenie problému.
- Implementovať a analyzovať vybrané algoritmy.

1 Úvod

V tejto práci bude skúmané minimálne vrcholové pokrytie a jeho zovšeobecnenia na rôznych triedach grafov. Na pochopenie danej problematiky je potrebné najprv rozumieť pojmom k-cestné vrcholové pokrytie a minimálne k-cestné vrcholové pokrytie a minimálne vážené k-cestné vrcholové pokrytie.

Definícia 1. Nech $G = (V, E)$ a k je kladné číslo. Podmnožinu vrcholov $S \subseteq V(G)$ voláme k-cestné vrcholové pokrytie, keď každá cesta rádu k z G obsahuje aspoň jeden vrchol z S.

Definícia 2. Nech S je množina všetkých k-cestných vrcholových pokrytí grafu G. Nech M je k-cestné vrcholové pokrytie z množiny S s najmenšou kardinalitou. Nech $\psi_k(G)$ je kardinalita M. Potom $\psi_k(G)$ budeme nazývať počet vrcholov v minimálnom k-cestnom vrcholovom pokrytí.

Definícia 3. Nech S je množina všetkých k-cestných vrcholových pokrytí grafu G. Nech $w_v \geq 0$ je váha vrchola v. Nech M je k-cestné vrcholové pokrytie z množiny S pre ktoré platí, že $\sum_{v \in M} w_v$ je minimálna. Nech $\tau_k(G)$ je kardinalita M. Potom $\tau_k(G)$ budeme nazývať počet vrcholov v minimálnom váženom k-cestnom vrcholovom pokrytí.

Motivácia problému minimálneho k-cestného vrcholového pokrytia vznikla v roku 2010 a pochádza z [1] problému vzťahujúcemu sa k bezpečnej komunikácii v sieťach s bezdrôtovými senzormi, ktorá bola definovaná v [2], kde bolo aj dokázané, že tento problém je NP-kompletný pre každé $k \geq 2$. V [2] ukázali lineárny optimálny algoritmus pre nájdenie minimálneho k-cestného vrcholového pokrytia pre stromy, horné ohraničenie pre počet vrcholov v minimálnom 3-cestnom vrcholovom pokrytí pre outerplanárne grafy a niekoľko odhadov a presných hodnôť pre počet vrcholov v minimálnom k-cestnom vrcholovom pokrytí. Navyše dokázali, že $\psi_3(G) \leq \frac{(2n+m)}{6}$, pre graf s n vrcholmi a m hranami.

František Kardoš, Ján Katrenič a Ingo Schiermeyer [3] prezentovali $\frac{23}{11}$-aproximačný algoritmus pre problém nájdenia minimálneho 3-cestného vrcholového pokrytia s polynomiálnou časovou zložitosťou a exaktný algoritmus na nájdenie minimálneho 3-cestného vrcholového pokrytia, ktorý má časovú zložitosť $\mathcal{O}^*(1.5171^n)$.

Ďalšiu motiváciu mali Jianhua Tu a Wenli Zhou, ktorý zaviedli pojem minimálneho váženeho k-cestného vrcholového pokrytia v [4] motivovaný problémom sledovania premávky, kde cesty predstavovali hrany grafu a križovatky vrcholy, kde bolo potrebné namontovať kamery. Váha týchto vrcholov predstavovala variabilnú cenu montáže kamery na danú križovatku. V [4] dokázali, že problém minimálneho váženeho k-cestného vrcholového pokrytia, je tiež NP-úplny pre $k \geq 2$, tak ako bol aj problém minimálne k-cestného vrcholového pokrytia. Taktiež navrhli a dokázali korektnosť 2-aproximačneho algoritmu pre problém minimálneho váženeho 3-cestného vrcholového pokrytia použitím "primal-dual"metódy čím vylepšili $\frac{23}{11}$-aproximačný algoritmus v [3]. Navyše v [5] navrhli a dokázali korektnosť 2-aproximačneho algoritmu pre problém minimálneho váženeho 3-cestného vrcholového pokrytia, no tentokrát s využitím techniky vrstvenia, .

V roku 2012 Li, Y., Tu, J. [6] predstavili greedy algoritmus, pre nájdenie minimálneho k-cestného vrcholového pokrytia pre grafy s jedným cyklom, ktorý má polynomiálnou časovú zložitosť.

Tesné dolné ohraničenie minimálneho 3-cestného vrcholového pokrytia bolo prezentované v [7] pre hexagonálne grafy Ervešom, R. a Šparlom, P.

V [8] Marko Jakovac a Andrej Taranenko vylepšili horné a dolné ohraničenia pre problém minimálneho k-cestného vrcholového pokrytia pre karteziánske a silné súčiny ciest. Ukazuje sa, že pre problém minimálneho 3-cestného vrcholového pokrytia sú tieto ohraničenia tesné. Aj pre lexikografické súčiny grafov sú uvedené ohraničenia pre problém minimálneho k-cestného vrcholového pokrytia, naviac pre problém minimálneho 2 a 3-cestného vrcholového pokrytia pre lexikografický súčin dvoch ľubovoľných grafov sú veľkosti množiny presne určené.

Jianhua Tu a Fengmei Yang ukázali, že problém minimálneho 3-cestného vrcholového pokrytia je NP-úplný aj pre kubické grafy [9], okrem toho predstavili ostré horné a dolné ohraničenie problému minimálneho 3-cestného vrcholového pokrytia pre kubické grafy a navrhli 1.57-aproximačný algoritmus pre tento problém v kubických grafoch.

Xianliang Liu, Hongliang Lu, Wei Wang a Weili Wu ako prvý predstavili algoritmus aproximačnej schémy polynomiálnej časovej zložitosti pre problém minimálneho k-cestného vrcholového pokrytia ($k \geq 2$) pre súvislé grafy typu jednotkového kurhu [10] t.j. vrcholy su spojené hranou ak ležia od seba vzdialené maximálne jednotkovú dĺžku, čiže ležia v kruhu, ktorého je jeden z nich centrom.

V [11] Boštjan Brešar, Marko Jakovac, Ján Katrenič, Gabriel Semanišin a Andrej Taranenko prezentovali horné ohraničenie pre problém minimálneho 3-cestného vrcholového pokrytia pre grafy s daným priemerným stupňom vrcholov. Okrem toho dokázali aj dolné ohraničenie pre probmém minimálneho k-cestného vrcholového pokrytia pre regulárne grafy. Pre kartézky súčin dvoch ciest ukázali asymptoticky tesné ohraničenia pre probmém minimálneho k-cestného vrcholového pokrytia a exaktnú hodnotu pre problém minimálneho 3-cestného vrcholového pokrytia.

Yan Chu, Jianxi Fan, Wenjun Liu a Cheng-Kuan Lin predstavili v [12] algoritmus aproximačnej schémy polynomiálnej časovej zložitosti pre problém minimálneho k-cestného vrcholového pokrytia ($k \geq 2$) pre súvislé grafy, narozdiel od predchádzajúcich algoritmov, tento nepotrebuje lokalizačné údaje o vrcholoch, takže sa dá aplikovať na grafy ohraničeného rastu.

V [13] Yuchao Li a Jianhua Tu dokázali, že problém minimálneho 4-cestného vrcholového pokrytia pre kubické grapy je NP-úplný. Okrem toho ukázali ostré dolné a horné ohraničenie pre problém minimálneho 4-cestného vrcholového pokrytia pre kubické grapy a navrhli 2-aproximačný algoritmus pre tento problém.

Xiaosong Li, Zhao Zhang a Xiaohui Huang navrhli v [14] k-aproximačný algoritmus pre problém minimálneho k-cestného vrcholového pokrytia pre spojité grafy s dĺžkou najkratšieho cyklu aspoň k.

Ďalšie aplikácie tohto problému našli na nemeckej univerzite Stefan Funke, André Nusser a Sabine Storandt [15]. Prvou aplikáciou bolo rýchle nájdenie bodu záujmu po ceste v navigácii napr. pumpy. Druhou aplikáciou bolo zjednodučenie výškovej mapy pre turistiku, čím by sa nemuselo posielať až tak veľa dát a navyše by mala mapa príjemný vizuálny vzhľad. Okrem toho zostrojili algoritmus pre problém minimálneho k-cestného vrcholového pokrytia pre orientovaný graf so systémov s unikátnymi orientovanými najkratšími cestami, ktorého kardinalita vrcholov bola maximálne $\mathcal{O}(\frac{n}{k} \, log \, \frac{n}{k})$.

Problém minimálneho k-cestného vrcholového pokrytia bol využitý aj v [16] na pomoc pri riešení situácie, keď viac než jeden úložný server zlyhá.

V roku 2014 B. Brešar, R. Krivoš-Belluš, G. Semanišin a P. Šparl ukázali v [17] účinné algoritmy na riešenie problému minimálneho váženeho k-cestného vrcholového pokrytia pre kompletné grafy a cykli, ale hlavne algoritmus pre stromy, ktorý má časovú zložitosť $\mathcal{O}(k \cdot |V(G)|)$.

N. Safina Devi, Aniket C. Mane a Sounaka Mishra dokázali v [18], že problém minimálneho k-cestného vrcholového pokrytia je APX-kompletný pre 3-regulárne ako aj 3-regulárne bipartitné grafy. Taktiež ukázali, že problém minimálneho k-cestného vrcholového pokrytia sa dá aproximovať greedy algoritmom pre regulárne grafy s faktorom 2 a, že problém minimálneho k-cestného vrcholového pokrytia je APX-kompletný pre grafy bez $K_{1,4}$ a algoritmus založený na lokálnom pomere generuje riešenie s faktorom 3.

V roku 2015 Mingyu Xiao a Shaowei Kou vylepšili v článku [19] exaktný algoritmus [5] na nájdenie minimálneho 3-cestného vrcholového pokrytia. Ich algoritmus má časovú zložitosť $\mathcal{O}^*(1.4656^n)$ a polynomiálnu pamäť alebo časovú zložitosť $\mathcal{O}^*(1.3659^n)$ a exponenciálnu pamäť.

Jianhua Tu v [20] prezentoval algoritmus s fixným paramterom na riešenie problému minimálneho 3-cestného vrcholového pokrytia s časovou zložitosťou $\mathcal{O}(2^s s^{3.376} + n^4 m)$. Pričom n je počet vrcholov, m je počet hrán a s je počet vrcholov vo vrcholovom pokrytí, ktoré hľadáme.

Marko Jakovac sa v [21] zameral na koreňový súčin grafov a prezentoval horné a dolné ohraničenia pre problém minimálneho k-cestného vrcholového pokrytia. Navyše pre problém minimálneho 2 a 3-cestného vrcholového pokrytia sú veľkosti pokrytia exaktne dané.

V [22] Benjamin Ries, Bernhard Schamberg a Walter Unger prezentovali $(2 + \frac{1}{2d-2})$-aproximačný algoritmus pre problém minimálneho 3-cestného vrcholového pokrytia pre bipartitné d-regulárne grafy. Navyše navrhli $(2 - o(1))$-aproximačný algoritmus pre problém minimálneho 3-cestného vrcholového pokrytia pre d-regulárne grafy čo je trochu lepší ako 2-aproximačný algoritmus navrhnutý v [4]. Okrem toho ich prístup vie byť zovšeobecnený pre $k \geq 3$ a vedie k 3-aproximačnému algoritmu pre $k \leq \frac{d+4}{2}$. Ešte k tomu tento výsledok vie byť rozšírený na α-aproximačný algoritmus pre $k \leq \frac{\alpha-2}{\alpha-1}d + 2$ pre $\alpha \geq 3$.

Sławomir Bakalarski a Jakub Zygadło prezentujú [23] cestnú sekvenciu grafu t.j. problém minimálneho k-cestného vrcholového pokrytia pre $k \in \{1, ..., |V|\}$ a nutnú a postačujúcu podmienku aby dve celé čísla boli na fixných pozíciách v cestnej sekvencii grafu.

V [24] Leila Sharifan, Mehrdad Nasernejad a Kazem Khashyarmanesh študovali algebraické vlastnosti problému minimálneho k-cestného vrcholového pokrytia pre stromy.

Arya Mazumdar študoval obnovu úložných serverov, ktoré zlyhajú v [25] za použitia minimálneho k-cestného vrcholového pokrytia, podobne ako v [16].

V [26] Marie Paindavoine a Bastien Vialla využili problém minimálneho k-cestného vrcholového pokrytia pri riešení problému minimalizovania bootstrapingu t.j. ako nájsť (jeden z) minimálnej sady šifrovaných textov, ktoré je potrebné bootstrapovať, aby sa správne vyhodnotil daný okruh.

Xiaosong Li, Zhao Zhang a Xiaohui Huang [27] ukázali že problém minimálneho váženeho k-cestného vrcholového pokrytia vie byť vyriešený v časovej zložitosti $\mathcal{O}(n)$ pre stromy a v časovej zložitosti $\mathcal{O}(rn)$ pre grafy s jedným cyklom dĺžky r a počtom vrcholov grafu n. Použitím algoritmu pre stormy prezentovali k-aproximačný algoritmus pre problém minimálneho váženeho k-cestného vrcholového pokrytia za predpokladu, že dĺžka najkratšieho cyklu v grafe je aspoň k.

V [28] P. Durga Bhavani, K. Vijay Kumar a S. Satyanarayana ukázali horné ohrnaničenia pre problém minimálneho k-cestného vrcholového pokrytia. Ich hlavným prínosom je ohraničenie pre všeobecný graf s n vrchomi a m hranami $\psi_k(G) \geq \frac{kn}{k+2} + \frac{m}{(k+1)(k+2)}$.

Magda Dettlaff, Magdalena Lemánska, Gabriel Semanišin a Rita Zuazua [29] študovali $(\psi_k - \gamma_k)$-perfektné cesty, cykli a kompletné grafy pre $k \geq 2$. Navyše poskytli úplnú charakterizáciu $(\psi_2 - \gamma_1)$-perfektných grafov opisujúc množinu jeho zakázaných indukovaných subgrafov a poskytujúc explicitnú charakterizáciu štruktúry grafov, ktoré patria do tejto rodiny.

V [30] Lemańska, M. prezentovala dolné ohraničenia pre problém minimálneho k-cestného vrcholového pokrytia z hľadiska počtu vrcholov a koncových vrcholov a charakterizovala extrémne stromy pre túto dolnú hranicu. Naviac charakterizovala extrémne ψ_k-stromy pre túto hornú hranicu.

Itamar Hartstein, Mordechai Shalom a Shmuel Zaks uverejnili v roku 2015 ďalšiu motiváciu pre problém minimálneho k-cestného vrcholového pokrytia [31]. Jedným z hlavných problémov v návrhu optickej siete je zhoršenie kvality signálu po precestovaní danej vzdialenosti d. Na odstránenie tohto problému sú regenerátory umiestnené v uzloch siete. Aby dvaja klienti mohli komunikovať v sieti musia byť regenerátory umiestnené tak, aby dĺžka medzi regenerátormi bola maximálne d. Regenerátor môže obsluhovať iba jednu svetelnú cestu. Regenerátory sú pomerne drahé zariadenia a mnohé výskumy boli vykonané, aby sa znížil ich počet v sieti pri zachovaní klavlity komunikácie. Navyše autori skúmali parametrizovateľnú zložitosť tohto problému.

V [32] Stefan Funke, André Nusse a Sabine Storandt prezentovali algoritmus pre problém minimálneho k-cestného vrcholového pokrytia pre orientované grafy, ktorý nájde veľmi malé pokrytie vďaka dolným hraniciam inštancii.

Ján Katrenič prezentoval algoritmus [33] s pevným paramterom na riešenie problém minimálneho 3-cestného vrcholového pokrytia s časovou zložitosťou $\mathcal{O}^*(1.8172^s n^{O(1)})$, pričom s je maximálna veľkosť pokrytia, čím vylepšil dočasne známe algoritmy.

V [34] Jianhua Tu a Zemin Jin navrhli algoritmus s pevným paramterom na riešenie problém minimálneho 4-cestného vrcholového pokrytia s časovou zložitosťou $\mathcal{O}^*(3^s)$, pričom s je maximálna veľkosť pokrytia.

Maw-Shang Chang, Li-Hsuan Chen, Ling-Ju Hung, Peter Rossmanith a Ping-Chen Su prezentovali algoritmy [35] s pevným paramterom na riešenie problém minimálneho 3-cestného vrcholového pokrytia. Prvý algoritmus má časovú zložitosť $\mathcal{O}^*(1.7964^s)$ s polynomiálou pamäťovou zložitosťou, pričom s je maximálna veľkosť pokrytia. Druhý algoritmus má časovú zložitosť $\mathcal{O}^*(1.7485^s)$ s exponenciálnou pamäťovou zložitosťou, čím vylepšili algoritmus Jána Katreniča [33].

V [36] Rija Erveš a Petra Šparl prezentovali tesné horné ohrnaničenia pre problém minimálneho k-cestného vrcholového pokrytia na hexagonálnych grafoch.

Christoph Brause a Ingo Schiermeyer prezentovali polynomiálny algoritmus [37], ktorý nájde 2 množiny s prázdnym prienikom T_1 a T_2, pre ktoré platí (i) pre akékoľvek 3-cestné vrcholové pokrytie S' v $G[T_2]$, $S' \cap T_1$ je 3-cestné vrcholové pokrytie v G, (ii) v G existuje minimálne 3-cestné vrcholové pokrytie, ktoré obsahuje T_1 a (iii) $|T_2| \leq 6 \cdot \psi_3(G[T_2])$, kde $\psi_3(G)$ je kardinalita 3-cestného vrcholového pokrytia a T_2 je jadro G.

V [38] Takuya Akiba, Yosuke Yano a Naoto Mizuno prezentovali polynomilány algoritmus pre problém minimálneho váženeho k-cestného vrcholového pokrytia na báze vrstvenia, o ktorom tvrdia na základe experimentov, že dáva dobré výsledky a má krátky čas výpočtu aj pre veľké k. Navyše verifikovali, že vie zvládnuť prepočet zmeny váhy hrany za 40 ms.

Mingyu Xiao and Shaowei Kou prezentovali algoritmus [39] s pevným paramterom na riešenie problém minimálneho 3-cestného vrcholového pokrytia s časovou zložitosťou $\mathcal{O}^*(1.7485^s)$ s polynomiálou pamäťovou zložitosťou, pričom s je maximálna veľkosť pokrytia, čím vylepšili dočasne známe algoritmy.

V [40] Euiwoong Lee prezentoval $\mathcal{O}(log\,k)$-aproximačný algoritmus na riešenie problém minimálneho k-cestného vrcholového pokrytia s časovou zložitosťou $2^{\mathcal{O}(k^3\,log\,k)}n^{\mathcal{O}(1)}$.

LiminWang, Wenxue Du, Zhao Zhang a Xiaoyan Zhang predstavili algoritmus [41] aproximačnej schémy polynomiálnej časovej zložitosti pre problém minimálneho váženeho k-cestného vrcholového pokrytia pre spojité grafy typu jednotkovej gule t.j. vrcholy su spojené hranou ak ležia od seba v trojrozmernom priestore vzdialené maximálne jednotkovú dĺžku, čiže ležia v guli, ktorého je jeden z nich centrom.

V [42] Zhao Zhang, Xiaohui Huang a Lina Chen predstavili jednoduchuchší algoritmus aproximačnej schémy polynomiálnej časovej zložitosti pre problém minimálneho k-cestného vrcholového pokrytia ($k \geq 2$) pre súvislé grafy typu jednotkového kurhu t.j. vrcholy su spojené hranou ak ležia od seba vzdialené maximálne jednotkovú dĺžku, čiže ležia v kruhu, ktorého je jeden z nich centrom.

MingyuXiao a ShaoweiKou [43] navrhli exaktné algoritmy pre problém minimálneho k-cestného vrcholového pokrytia. Prvý algoritmus má časovú zložitosť $\mathcal{O}^*(1.4656^n)$ s polynomiálou pamäťovou zložitosťou. Druhý algoritmus má časovú zložitosť $\mathcal{O}^*(1.3659^n)$ s exponenciálnou pamäťovou zložitosťou, čím vylepšili zatiaľ známe algoritmy.

V [44] Zhao Zhang, Xiaoting Li, Yishuo Shi, Hongmei Nie a Yuqing Zhu predstavili algoritmus aproximačnej schémy polynomiálnej časovej zložitosti pre problém minimálneho k-cestného vrcholového pokrytia ($k \geq 2$) pre grafy typu jednotkovej hypergule, ktorých heterogenita je ohraničená konštantou t.j. vrcholy su spojené hranou ak ležia od seba vzdialené v $\mathbb{R}^d$ maximálne jednotkovú dĺžku, čiže ležia v hyperguli, ktorého je jeden z nich centrom.

Christoph Brause a Rastislav Krivoš-Belluš prezentovali [45] vzťah medzi problémami minimálneho k-cestného vrcholového pokrytia a minimálneho k-cestného rozdelenia na základe ktorého získali nové ohraničenia pre ich invarianty a novú postačujúcu podmienku pre NP-kompletnosť minimálneho k-cestného vrcholového pokrytia z hľadiska zakázaných podgrafov.

V [46] Jianhua Tu, Lidong Wu, Jing Yuan a Lei Cui prezentovali parametrizovaný algoritmus pre problém minimálneho 3-cestného vrcholového pokrytia so zložitosťou $4^p \cdot n^{\mathcal{O}(1)}$, pričom p je najväčia šírka stromovej dekompozície grafu. Navyše ukázali, že pre problém minimálneho 3-cestného vrcholového pokrytia na planárnych grafoch existuje podexponenciálny parametrizovaný algoritmus s časovou zložitosťou $2^{\mathcal{O}(\sqrt{s})} \cdot n^{\mathcal{O}(1)}$, kde s je maximálna veľkosť pokrytia.

Jianhua Tu prezentoval efektívny algoritmus [47] pre problém minimálneho k-cestného vrcholového pokrytia pre kaktusy.

V [48] Toshihiro Fujito ukázal, že problém minimálneho k-cestného vrcholového pokrytia pre spojité grafy je k-aproximovateľný a problém minimálneho váženeho k-cestného vrcholového pokrytia pre spojité grafy je $1.35\, ln\, n + 3$-aproximovateľný pre $k \leq 3$.

Zhao Li a Liancui Zuo [49] prezentovali niekoľko odhadov a presných hodnôť pre problém minimálneho k-cestného vrcholového pokrytia pre karteziánske súčiny grafov.

Literatúra

[1] M. Novotný. *Design and analysis of a generalized canvas protocol*, volume 6033 LNCS of *Lecture Notes in Computer Science (including subseries Lecture Notes in Artificial Intelligence and Lecture Notes in Bioinformatics)*. 2010. Cited By :27.

[2] B. Brešar, F. Kardoš, J. Katrenič, and G. Semanišin. Minimum k-path vertex cover. *Discrete Applied Mathematics*, 159(12):1189–1195, 2011. Cited By :58.

[3] F. Kardoš, J. Katrenič, and I. Schiermeyer. On computing the minimum 3-path vertex cover and dissociation number of graphs. *Theoretical Computer Science*, 412(50):7009–7017, 2011. Cited By :29.

[4] J. Tu and W. Zhou. A primal-dual approximation algorithm for the vertex cover p 3 problem. *Theoretical Computer Science*, 412(50):7044–7048, 2011. Cited By :29.

[5] J. Tu and W. Zhou. A factor 2 approximation algorithm for the vertex cover p3problem. *Information Processing Letters*, 111(14):683–686, 2011. Cited By :34.

[6] Y. Li and J. Tu. An efficient algorithm for the vertex cover p k problem on unicyclic graphs. *Beijing Huagong Daxue Xuebao (Ziran Kexueban)/Journal of Beijing University of Chemical Technology (Natural Science Edition)*, 39(4):125–127, 2012.

[7] R. Erveš and P. Šparl. Different graph invariants and hexagonal graphs. In *Proceedings of the 12th International Symposium on Operational Research in Slovenia, SOR 2013*, pages 143–148, 2013.

[8] M. Jakovac and A. Taranenko. On the k-path vertex cover of some graph products. *Discrete Mathematics*, 313(1):94–100, 2013. Cited By :16.

[9] J. Tu and F. Yang. The vertex cover p3 problem in cubic graphs. *Information Processing Letters*, 113(13):481–485, 2013. Cited By :15.

[10] X. Liu, H. Lu, W. Wang, and W. Wu. Ptas for the minimum k-path connected vertex cover problem in unit disk graphs. *Journal of Global Optimization*, 56(2):449–458, 2013. Cited By :13.

[11] B. Brešar, M. Jakovac, J. Katrenič, G. Semanišin, and A. Taranenko. On the vertex k-path cover. *Discrete Applied Mathematics*, 161(13-14):1943–1949, 2013. Cited By :24.

[12] Y. Chu, J. Fan, W. Liu, and C. . Lin. *PTAS for minimum k-Path connected vertex cover in growth-bounded graphs*, volume 8630 LNCS of *Lecture Notes in Computer Science (including subseries Lecture Notes in Artificial Intelligence and Lecture Notes in Bioinformatics)*. 2014.

[13] Y. Li and J. Tu. A 2-approximation algorithm for the vertex cover p4problem in cubic graphs. *International Journal of Computer Mathematics*, 91(10):2103–2108, 2014. Cited By :7.

[14] S. Funke, A. Nusser, and S. Storandt. On k-path covers and their applications. *Proceedings of the VLDB Endowment*, 7(10):893–902, 2014. Cited By :17.

[15] X. Li, Z. Zhang, and X. Huang. *Approximation algorithm for the minimum connected k-path vertex cover problem*, volume 8881 of *Lecture Notes in Computer Science (including subseries Lecture Notes in Artificial Intelligence and Lecture Notes in Bioinformatics)*. 2014.

[16] A. Mazumdar. Achievable schemes and limits for local recovery on a graph. In *2014 52nd Annual Allerton Conference on Communication, Control, and Computing, Allerton 2014*, pages 909–913, 2014. Cited By :3.

[17] B. Brešar, R. Krivoš-Belluš, G. Semanišin, and P. Šparl. On the weighted k-path vertex cover problem. *Discrete Applied Mathematics*, 177:14–18, 2014. Cited By :12.

[18] N. Safina Devi, A. C. Mane, and S. Mishra. Computational complexity of minimum p4 vertex cover problem for regular and k 1, 4-free graphs. *Discrete Applied Mathematics*, 184:114–121, 2015. Cited By :2.

[19] M. Xiao and S. Kou. *Faster computation of the maximum dissociation set and minimum 3-path vertex cover in graphs*, volume 9130 of *Lecture Notes in Computer Science (including subseries Lecture Notes in Artificial Intelligence and Lecture Notes in Bioinformatics)*. 2015. Cited By :3.

[20] J. Tu. A fixed-parameter algorithm for the vertex cover p3 problem. *Information Processing Letters*, 115(2):96–99, 2015. Cited By :21.

[21] M. Jakovac. The k-path vertex cover of rooted product graphs. *Discrete Applied Mathematics*, 187:111–119, 2015. Cited By :4.

[22] B. Ries, B. Schamberg, and W. Unger. *The k-observer problem on d-regular graphs*, volume 9212 of *Lecture Notes in Computer Science (including subseries Lecture Notes in Artificial Intelligence and Lecture Notes in Bioinformatics)*. 2015.

[23] S. Bakalarski and J. Zygadło. On the path sequence of a graph. *Schedae Informaticae*, 24:239–251, 2015.

[24] L. Sharifan, M. Nasernejad, and K. Khashyarmanesh. Minimal path cover sets and monomial ideals. *Journal of Algebra and its Applications*, 14(2), 2015. Cited By :1.

[25] A. Mazumdar. Storage capacity of repairable networks. *IEEE Transactions on Information Theory*, 61(11):5810–5821, 2015. Cited By :8.

[26] M. Paindavoine and B. Vialla. *Minimizing the number of bootstrappings in fully homomorphic encryption*, volume 9566 of *Lecture Notes in Computer Science (including subseries Lecture Notes in Artificial Intelligence and Lecture Notes in Bioinformatics)*. 2016. Cited By :4.

[27] X. Li, Z. Zhang, and X. Huang. Approximation algorithms for minimum (weight) connected k-path vertex cover. *Discrete Applied Mathematics*, 205:101–108, 2016. Cited By :5.

[28] P. Durga Bhavani, K. Vijay Kumar, and S. Satyanarayana. An investigation on some theorems on k-path vertex cover. *Global Journal of Pure and Applied Mathematics*, 12(2):1403–1412, 2016.

[29] M. Dettlaff, M. Lemánska, G. Semanǐsin, and R. Zuazua. Some variations of perfect graphs. *Discussiones Mathematicae - Graph Theory*, 36(3):661–668, 2016.

[30] M. Lemańska. On the minimum vertex k-path cover of trees. *Utilitas Mathematica*, 100:299–307, 2016.

[31] I. Hartstein, M. Shalom, and S. Zaks. On the complexity of the regenerator location problem treewidth and other parameters. *Discrete Applied Mathematics*, 199:199–225, 2016.

[32] S. Funke, A. Nusser, and S. Storandt. On k-path covers and their applications. *VLDB Journal*, 25(1):103–123, 2016.

[33] J. Katrenič. A faster fpt algorithm for 3-path vertex cover. *Information Processing Letters*, 116(4):273–278, 2016. Cited By :7.

[34] J. Tu and Z. Jin. An fpt algorithm for the vertex coverp4problem. *Discrete Applied Mathematics*, 200:186–190, 2016. Cited By :2.

[35] M. . Chang, L. . Chen, L. . Hung, P. Rossmanith, and P. . Su. Fixed-parameter algorithms for vertex cover p3. *Discrete Optimization*, 19:12–22, 2016. Cited By :6.

[36] R. Erveš and P. Šparl. Maximum induced matching of hexagonal graphs. *Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society*, 39:283–295, 2016.

[37] C. Brause and I. Schiermeyer. Kernelization of the 3-path vertex cover problem. *Discrete Mathematics*, 339(7):1935–1939, 2016.

[38] T. Akiba, Y. Yano, and N. Mizuno. Hierarchical and dynamic k-path covers. In *International Conference on Information and Knowledge Management, Proceedings*, volume 24-28-October-2016, pages 1543–1552, 2016.

[39] M. Xiao and S. Kou. *Kernelization and parameterized algorithms for 3-path vertex cover*, volume 10185 LNCS of *Lecture Notes in Computer Science (including subseries Lecture Notes in Artificial Intelligence and Lecture Notes in Bioinformatics)*. 2017. Cited By :1.

[40] E. Lee. Partitioning a graph into small pieces with applications to path transversal. In *Proceedings of the Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms*, pages 1546–1558, 2017. Cited By :4.

[41] L. Wang, W. Du, Z. Zhang, and X. Zhang. A ptas for minimum weighted connected vertex cover p3problem in 3-dimensional wireless sensor networks. *Journal of Combinatorial Optimization*, 33(1):106–122, 2017. Cited By :4.

[42] Z. Zhang, X. Huang, and L. Chen. *A simpler method to obtain a PTAs for connected k-path vertex cover in unit disk graph*, volume 10251 LNCS of *Lecture Notes in Computer Science (including subseries Lecture Notes in Artificial Intelligence and Lecture Notes in Bioinformatics)*. 2017.

[43] M. Xiao and S. Kou. Exact algorithms for the maximum dissociation set and minimum 3-path vertex cover problems. *Theoretical Computer Science*, 657:86–97, 2017. Cited By :2.

[44] Z. Zhang, X. Li, Y. Shi, H. Nie, and Y. Zhu. Ptas for minimum k-path vertex cover in ball graph. *Information Processing Letters*, 119:9–13, 2017. Cited By :3.

[45] C. Brause and R. Krivoš-Belluš. On a relation between k-path partition and k-path vertex cover. *Discrete Applied Mathematics*, 223:28–38, 2017.

[46] J. Tu, L. Wu, J. Yuan, and L. Cui. On the vertex cover p3problem parameterized by treewidth. *Journal of Combinatorial Optimization*, 34(2):414–425, 2017.

[47] J. Tu. Efficient algorithm for the vertex cover pkproblem on cacti. *Applied Mathematics and Computation*, 311:217–222, 2017.

[48] T. Fujito. *On approximability of Connected Path Vertex Cover*, volume 10787 LNCS of *Lecture Notes in Computer Science (including subseries Lecture Notes in Artificial Intelligence and Lecture Notes in Bioinformatics)*. 2018.

[49] Z. Li and L. Zuo. The k-path vertex cover in cartesian product graphs and complete bipartite graphs. *Applied Mathematics and Computation*, 331:69–79, 2018.