Rozšírené zadanie diplomovej práce

Názov témy:	Zovšeobecnenie problému vrcholového pokrytia vrcholov grafu
Autor:	Dávid Szabari
Školiace pracovisko:	Ústav informatiky
Vedúci práce:	doc. RNDr. Gabriel Semanišin, PhD.
Konzultant:	RNDr. Rastislav Krivoš-Belluš, PhD.
Ciele práce:	

- Analyzovať vybrané zovšeobecnenia Problému vrcholového pokrytia a ich aplikácie pre komunikáciu v sieťach
- Pokúsiť sa získať nové výsledky a navrhnúť algoritmy na riešenie problému
- Implementovať a analyzovať vybrané algoritmy

Prvotná motivácia pochádza z článku [1], v ktorom sa rozhodol autor spraviť bezdrôtovú senzorovú sieť (WSN - wirelles sensor network). Potreboval však, aby bola dostatočne bezpečná, preto chcel zakúpiť acces pointy, ktoré by dokázali kontrolovať sieť. Takéto access pointy boli ale podstatne drahšie ako obyčajné, preto vymyslel spôsob ako ušetriť a rozhodol sa, že správa má byť skontrolovaná aspoň na každom k-tom access pointe, ktorým prejde. Tu však narazil na problém. Nevedel koľko drahších access pointov má vlastne nakúpiť. V článku [2] autori zistili, že tento problém je zovšeobecnením problému vrcholového pokrytia, a teda je to NP-úplný problém. Postupne sa záujem o túto problematiku rozšíril a vzniklo mnoho ďalších článkov, ktoré sa ňou zaoberali. V nasledujúcich tabuľkách môžeme vidieť výsledky, ktoré sa už podarilo dosiahnuť. Prčiom n označuje počet vrcholov a m - označuje počet hrán. Našim hlavným cieľom je tieto tabuľky rozšíriť.

Tabuľka 1: Aproximačné algoritmy pre rôzne triedy grafov na riešenie problému k-cestného vrcholového pokrytia.

	$k = 3$	$k = 4$	$k \geq 2, k \in \mathbb{N}$
3-regulárne grafy	1.57-aproximačný algoritmus [**?**]		
d-regulárne grafy		2-aproximačný algoritmus [6]	
Bipartitne grafy		2-aproximačný algoritmus [6]	
Grafy bez $k_{1,4}$		3-aproximačný algoritmus [6]	
Všeobecné grafy			
d-regulárne bipartitné grafy	$1 + \frac{1}{2d-2}$-aproximačný algoritmus [4]		
d-regulárne grafy ($d \geq 3$)	$2 - o(1)$-aproximačný algoritmus [4]		
d-regulárne grafy ($k \leq \frac{d+2}{2}$)			3-aproximačný algoritmus [4]

Tabuľka 2: Časová zložitosť algoritmov na riešenie problému k-cestného vrcholového pokrytia.
$^{*}s$ je veľkosť pokrytia.
** Časová zložitosť je $rn^{O(f(r))}$, kde $r = O((\frac{1}{\mathcal{E}} \cdot ln(\frac{1}{\mathcal{E}})))$, pričom $\mathcal{E}$ závisí iba od k a $\mathcal{E}_1$.

	$k = 3$	$k = 4$	$k \geq 2, k \in \mathbb{N}$
Grafy bez $k_{1,4}$			
Všeobecné grafy	$O(1.8172^s n^{O(1)})$ [7]*	$O^*(3^s)$ [5]*	$(1 + \mathcal{E}_1)$-aproximačný alogirmus [13] **
	$O^*(1.7964^s)$ [8]*		
	$O^*(1.7485^s)$ [8]*		
	$O^*(1.4658^n)$ [12]		
	$O^*(1.3659^n)$ [12]		
	$O(2^s s^3.376 + n^4 m)$ [9]*		
Graf jednotkových krohov			$n^{O(k^4 \frac{4(6k)^k}{\mathcal{E}^2})}$ [10]

Tabuľka 3: Aproximačné algoritmy pre rôzne triedy grafov na riešenie problému ohodnoteného k-cestného vrcholového pokrytia.

	$k = 3$
Všeobecné grafy	2-aproximačný algoritmus [11]

Tabuľka 4: Časová zložitosť algoritmov na riešenie problému ohodnoteného k-cestného vrcholového pokrytia.

	k-cestné vrcholové pokrytie
Kompletné grafy	$O(kn)$ [3]
Stromy	$O(kn)$ [3]
Cykly	$O(kn)$ [3]

Tabuľka 5: Horné a dolné odhady pre dané problémy na daných grafoch.
* Bez izolovaných vrcholov.
**Δ je maximálny stupeň grafu G.

	3-cestné vrcholové pokrytie	k-cestné vrcholové pokrytie
3-regulárne grafy	$\frac{2}{5}n \leq \psi_3(G) \leq \frac{n}{2}$ [14]	
d-regulárne grafy		$\Psi_k(G) \geq \frac{d-k+2}{2d-k+2}\lvert G(V)\rvert$ [3]
Outerplanar graf	$\Psi_3(G) \leq \frac{n}{2}$ [2]	
Všeobecné grafy	$\Psi_3(G) \leq \frac{kn}{k+2} + \frac{m}{(k+1)(k+2)}$ [3]	$\Psi_k(G) \leq \frac{2n+m}{6}$ [2]
	$\Psi_3(G) \leq \frac{\lceil\frac{\Delta-1}{1}\rceil}{\lceil\frac{\Delta+1}{2}\rceil}\lvert G(V)\rvert$ [2] **	$\Psi_k(G) \leq \lvert G(V)\rvert - \frac{k-1}{k}\sum_{u \in V(G)} \frac{2}{1+d(u)}$ [2] *

Literatúra

[1] M. Novotný, Design and analysis of a generalized canvas protocol, Proceedings of WISTP 2010, LNCS, Springer-Verlag, 6033 (2010) 106–121

[2] B. Brešar, F. Kardoš , J. Katrenič, G. Semanišin, Minimum k–path vertex cover, Discrete Appl. Math. 159 (12) (2011) 1189–1195.

[3] B. Brešar, R. Krivoš-Belluš, G. Semanišin, P. Šparl, On the weighted k-path vertex cover problem, Discrete Appl. Math. 177 (11) (2014) 14–18.

[4] B. Ries, B. Schamberg, W. Unger, The k-observer problem on d-regular graphs, LNCS 9212 (2015) 81-93

[5] Jianhua Tu, Zemin Jin, An FPT algorithm for the vertex cover P_4 problem, Discrete Appl. Math. 200 (2016) 186-190

[6] N. Safina Devi, Aniket C. Mane, Sounaka Mishra, Computational complexity of minimum P_4 vertex cover problem for regular and $K_{1,4}$-free graphs, Discrete Appl. Math. 184 (2015) 114-121

[7] Ján Katrenič, A faster FPT algorithm for 3-path vertex cover, Information Processing Letters 116 (2016) 273–278

[8] Maw-Shang Chang, Li-Hsuan Chen, Ling-Ju Hung, Peter Rossmanith, Ping-Chen Su, Fixed-parameter algorithms for vertex cover P_3, Discrete Optimization 19 (2016) 12–22

[9] Jianhua Tu, A fixed-parameter algorithm for the vertex cover P_3 problem, Information Processing Letters 115 (2015) 96-99

[10] Xianliang Liu, Hongliang Lu, Wei Wang, Weili Wu, PTAS for the minimum k-path connected vertex cover problem in unit disk graphs, Journal of Global Optimization 56 (2013) 449-458

[11] Jianhua Tu, Wenli Zhou, A factor 2 approximation algorithm for the vertex cover P_3 problem, Information Processing Letters 111 (2011) 683-686

[12] Mingyu Xiao, Shaowei Kou, Faster Computation of the Maximum Dissociation Set and Minimum 3-Path Vertex Cover in Graphs, Frontiers in Algorithmics: 9th International Workshop, FAW 2015, Guilin, China, July 3-5, 2015, Proceedings, (2015) 282-293

[13] Yan Chu, Jianxi Fan, Wenjun Liu, Cheng-Kuan Lin, PTAS for Minimum k-Path Connected Vertex Cover in Growth-Bounded Graphs, Algorithms and Architectures for Parallel Processing: 14th International Conference, ICA3PP 2014, Dalian, China, August 24-27, (2015) 114-126

[14] Jianhua Tu, Fengmei Yang, The vertex cover P_3 problem in cubic graphs, Information Processing Letters 113 (2013) 481-485